Ein Summationssatz für Orthogonalreihen mit monotoner Koeffizientenfolge

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Grundintervall $[a, b]$ orthonormiertes Funktionensystem. Wir betrachten die Orthogonalreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{1}$$

mit einer positiven, monoton nichtwachsenden Koeffizientenfolge $\{a_n\}$. Es ist bekannt, daß jede der folgenden zwei Bedingungen:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 < \infty, \text{ [1]} \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \infty \text{ [2]} \tag{3}$$

für die $(C, 1)$-Summierbarkeit fast überall der Orthonalreihe (1) hinreichend ist.

In dieser Note werden wir den folgenden Satz beweisen. *Gibt es eine Indexfolge* $\{n_k\}$ $(n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots)$, *für die*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\{a_{n_k}\sqrt{n_{k+1}-n_k},\ a_{n_k}^2(n_{k+1}-n_k)\log^2 k\} < \infty \tag{4}$$

gilt, so ist die Reihe (1) *fast überall* $(C, 1)$*-summierbar.*

Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingung (4) schwächer als (2), oder (3) ist. Gilt nämlich (2), oder (3), so ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_{2^k}^2 2^k \log^2 k < \infty, \quad \text{oder} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{2^k}\sqrt{2^k} < \infty,$$

[1]) S. Kaczmarz, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99—105; D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales. Deuxième partie, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56 - 108.

[2]) G. Alexits, Ein Summationssatz für Orthogonalreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 5—9.

und so besteht auch (4) mit $n_k = 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Andererseits es gibt eine positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge, für die (4) erfüllt wird, aber weder (2) noch (3) bestehen. Es sei nämlich

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2^{2^{k+1}} - 2^{2^k}}\, k \log k} \qquad (2^{2^k} \leqq n < 2^{2^{k+1}};\ k = 2, 3, \ldots).$$

Dann ist

$$\sum_{k=2^4}^{\infty} \min\{a_{2^{2^k}} \sqrt{2^{2^{k+1}} - 2^{2^k}},\ a_{2^{2^k}}^2 (2^{2^{k+1}} - 2^{2^k}) \log^2 k\} = \sum_{k=2^4}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

aber

$$\sum_{n=2^4}^{\infty} a_n^2 (\log\log n)^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2^{2^k}}^{2^{2^{k+1}}-1} a_n^2 (\log\log n)^2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log^2 k} = \infty$$

und

$$\sum_{n=2^4}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{n=2^{2^k}}^{2^{2^{k+1}}} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k} = \infty.$$

Beweis des Satzes. Seien $k_1 < k_2 < \cdots < k_i < \cdots$ die Indizes k, für die

$$\min\{a_{n_k} \sqrt{n_{k+1} - n_k},\ a_{n_k}^2 (n_{k+1} - n_k) \log^2 k\} = a_{n_k} \sqrt{n_{k+1} - n_k}$$

ist, und $l_1 < l_2 < \cdots < l_j < \cdots$ seien die übrigen Indizes. Nach (4) ist dann

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b |s_{n_{k_i+1}}(x) - s_{n_{k_i}}(x)|\, dx \leqq \sqrt{b-a} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\int_a^b (s_{n_{k_i+1}}(x) - s_{n_{k_i}}(x))^2\, dx} =$$

$$= \sqrt{b-a} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{a_{n_{k_i}+1}^2 + \cdots + a_{n_{k_i+1}}^2} \leqq \sqrt{b-a} \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_{k_i}} \sqrt{n_{k_i+1} - n_{k_i}} < \infty,$$

und so konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} (s_{n_{k_i+1}}(x) - s_{n_{k_i}}(x)) \tag{5}$$

auf Grund des Satzes von B. LEVI fast überall.

Wir betrachten das orthonormierte Funktionensystem

$$\Phi_k(x) = \frac{a_{n_k+1}\varphi_{n_k+1}(x) + \cdots + a_{n_{k+1}}\varphi_{n_{k+1}}(x)}{(a_{n_k+1}^2 + \cdots + a_{n_{k+1}}^2)^{1/2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Sei $c_k = (a_{n_k+1}^2 + \cdots + a_{n_{k+1}}^2)^{1/2}$ für $k = l_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ und $c_k = 0$ sonst. Auf Grund von (4) mit Anwendung des Satzes von D. MENCHOFF und H. RADEMACHER[3]) folgt, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k(x),$$

d. h. die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} (s_{n_{l_j+1}}(x) - s_{n_{l_j}}(x)) \tag{6}$$

fast überall konvergiert. Durch Addition von (5) und (6) ergibt sich, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (s_{n_{k+1}}(x) - s_{n_k}(x))$$

und folglich die Folge $\{s_{n_k}(x)\}$ fast überall konvergiert.

Aus (4) folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^2 (n_{k+1} - n_k) < \infty. \tag{7}$$

Daraus ergibt sich[4])

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k < 2^n < n_{k+1}}^{(n)} \int_a^b (s_{2^n}(x) - s_{n_k}(x))^2 \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k < 2^n < n_{k+1}}^{(n)} (a_{n_k+1}^2 + \cdots + a_{2^n}^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^2 \sum_{n_k < n < n_{k+1}}^{(n)} (2^n - n_k) = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}^2 (n_{k+1} - n_k) < \infty,$$

und so konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_k < 2^n < n_{k+1}}^{(n)} (s_{2^n}(x) - s_{n_k}(x))^2$$

auf Grund des Satzes von B. LEVI fast überall, also ist $s_{2^n}(x) - s_{n_k}(x) \to 0$ $(n_k < 2^n < n_{k+1})$ fast überall. Damit haben wir bewiesen, daß die Folge $\{s_{2^n}(x)\}$ fast überall konvergiert. Da nach (7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

gilt, so ergibt sich nach einem Satz von S. KACZMARZ[5]), daß die Reihe (1) fast überall $(C, 1)$-summierbar ist.

---

[3]) D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, **4** (1923), 82—105; H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **87** (1922), 112—138.

[4]) $\sum^{(n)}$ bedeutet, daß man in bezug auf n zu summieren hat.

[5]) S. KACZMARZ, Über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, **96** (1927), 148—151.

Damit haben wir den Satz bewiesen.

Bemerkung. Aus dem Beweis des Satzes sieht man, daß auch die folgende, etwas schärfere Behauptung gilt: *Ist* (4) *für die positive, monoton nichtwachsende Koeffizientenfolge* $\{a_n\}$ *mit einer Indexfolge* $\{n_k\}$ *erfüllt und gilt* $c_n^2 = O(a_n^2)$, *so ist die Orthogonalreihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

fast überall $(C, 1)$*-summierbar.*

(Eingegangen am 18. September 1959)